

Dans cette séance on va voir → la notion de matrice diagonalisable 19.11
 ↳ la notion / procédure de diagonalisation
 ↳ l'application pour calculer des puissances de matrices

On commence avec un résultat qui formalise un phénomène déjà observé :

THM 10.22 | Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes
 et soient $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres non nuls tels que
 $\bar{v}_1$ est vecteur propre de valeur propre λ_1
 $\vdots$
 $\bar{v}_k$ ————— λ_k
 Alors $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ est libre.

(Preuve) Par récurrence sur $k \geq 1$. Le cas $k=1$ est immédiat.
 On suppose que c'est vrai pour k et on va le démontrer pour $k+1$.
 On écrit

$$(*) \quad \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \bar{v}_{k+1} = 0 \quad \text{pour } \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$$

On veut montrer que cela implique forcément $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$. Si l'on multiplie (*) par A à gauche

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot 0 = A(\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \bar{v}_{k+1}) = \alpha_1 A \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k A \bar{v}_k + \alpha_{k+1} A \bar{v}_{k+1} \\ (\Delta) \quad &= \alpha_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \bar{v}_{k+1} \end{aligned}$$

et si l'on multiplie (*) par λ_{k+1} on trouve

$$(\square) \quad 0 = \alpha_1 \lambda_{k+1} \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \bar{v}_{k+1}$$

Alors, $(\square) - (\Delta)$ nous donne

$$0 = 0 - 0 = \alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \bar{v}_k + \cancel{\alpha_{k+1} (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}) \bar{v}_{k+1}} = 0$$

Comme $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est libre par hypothèse de récurrence, on conclut que

$$\alpha_1(\underbrace{\lambda_{n+1} - \lambda_1}_{\neq 0}) = 0, \dots, \alpha_n(\underbrace{\lambda_{n+1} - \lambda_n}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

ce qui implique, par (a), que

$$0 = \underbrace{\alpha_1}_{=0} \bar{v}_1 + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{=0} \bar{v}_n + \alpha_{n+1} \bar{v}_{n+1} = \alpha_{n+1} \bar{v}_{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0. \checkmark \square$$

Comment utiliser ce résultat ?

• Si vous avez trouvé une base

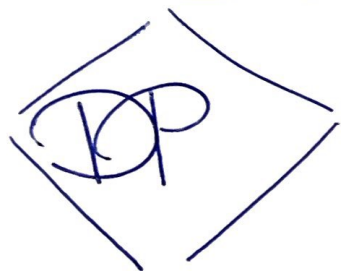
$$B_i = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{m_i}\}$$

par définition
 $m_i = \text{mult}_g(\lambda_i)$

pour toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A



• $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ est un ensemble libre
(mais pas forcément une base de $\mathbb{R}^n$!)



Chapitre 11 : Diagonalisation

Définition 11.4

Une matrice A est dite diagonalisable

s'il existe une matrice inversible P de la même taille que A telle que

$$P^{-1} A P = D$$

← matrice diagonale



$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Première caractérisation
de diagonalisable
(THM 11.6)

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

A diagonalisable

$\Updownarrow$ Eq (i)

A possède n vecteurs propres
qui forment une base de $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$ Eq. (ii)

Dans $\diamondsuit$, B est une base de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}_{m_k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ \bar{v}_{1,1} & \bar{v}_{m_1,1} & \dots & \bar{v}_{1,k} & \bar{v}_{m_k,k} \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{m_k}$

On montre la première équivalence Eq (i). Pour Eq (ii), voir THM 11.14

(Preuve) $\Downarrow$ Si A est diagonalisable, alors on peut écrire

$$(1) \quad P^{-1} A \cdot P = D \quad \text{avec } D \text{ diagonale.}$$

Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ et $P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$.

Alors (1) nous dit que $A \cdot P = P \cdot D$, ce qui implique

$$A \cdot P \cdot \bar{e}_i = P \cdot D \cdot \bar{e}_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Or, $P \cdot \bar{e}_i = \bar{v}_i$, ce qui nous dit que $A \cdot P \cdot \bar{e}_i = A \cdot \bar{v}_i$. En outre $P \cdot D \cdot \bar{e}_i = P \cdot d_i \bar{e}_i = d_i \cdot P \cdot \bar{e}_i = d_i \bar{v}_i$. En conséquence $A \bar{v}_i = d_i \bar{v}_i$

$1 \leq i \leq n$ et donc $\bar{v}_i$ est vecteur propre de valeur propre λ_i .
 Comme P est inversible $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est base de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs propres de A .

$\Uparrow$) Si A possède $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ formée de
vecteurs propres avec valeurs
 propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ respectivement, alors

$$A \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

On pose $P := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$. Comme $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$,
 P est inversible. On pose aussi $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors

$$A \cdot P = A \cdot [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] = [A \bar{v}_1 \dots A \bar{v}_n] = [\lambda_1 \bar{v}_1 \dots \lambda_n \bar{v}_n]$$

$$= D \cdot [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] = D \cdot P$$

ce qui nous donne $P^{-1}AP = D$, i.e. A est diagonalisable

Deuxième caractérisation
 de diagonalisable
 THM 11.14

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec toutes les
valeurs propres réelles:
 A diagonalisable

$\Uparrow \text{ Eq. (iii)}$

$$\text{mult}_A(\lambda) = \text{mult}_D(\lambda) \\ \forall \lambda \text{ valeur propre de } A$$

Avant de faire la preuve:

Déf Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit le spectre de A comme
 $\text{Spectre}(A) := \{\lambda \text{ valeur propre de } A\}$.

(Preuve) On montre d'abord Eq(ii) ici. Pour $\Rightarrow$ c'est clair vu que $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de A . Pour $\Leftarrow$ on utilise d'abord que $\text{Spectre}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Si $\mathcal{B}' = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A , alors la valeur propre de chaque $\bar{w}_i$ est dans $\text{Spectre}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. On suppose sans perte de généralité que

- $\underbrace{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{m_1}}_{m_1}$ ont valeur propre λ_1 ,
- $\underbrace{\bar{w}_{m_1+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+m_2}}_{m_2}$ ont valeur propre λ_2 ,
- $\vdots$
- $\underbrace{\bar{w}_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+\dots+m_k}}_{m_k}$ ont valeur propre λ_k .

Alors, on pose $\mathcal{B}_1 := \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{m_1}\} \subseteq E_{\lambda_1}$,
 $\mathcal{B}_2 := \{\bar{w}_{m_1+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+m_2}\} \subseteq E_{\lambda_2}$,
 $\vdots$
 $\mathcal{B}_k := \{\bar{w}_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+\dots+m_k}\} \subseteq E_{\lambda_k}$,
sont familles libres, car incluses dans $\mathcal{B}'$ qui est libre.

Or, comme $(m_i \leq \dim E_{\lambda_i}, \text{ car } \mathcal{B}_i \text{ libre})$

$$\underbrace{n}_{\substack{\uparrow \\ \text{par} \\ \text{hypothèse}}} = m_1 + \dots + m_k \leq \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k} \leq \dim \mathbb{R}^n = n$$

$\uparrow$ THM 10.22

on a que $m_1 = \dim E_{\lambda_1}, \dots, m_k = \dim E_{\lambda_k}$, ce qui implique que $\mathcal{B}_1$ est base de $E_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_k$ est base de E_{λ_k} , i.e. $\diamondsuit$ donne une base de $\mathbb{R}^n$.

Finalement, on note que $\diamondsuit$ donne une base de $\mathbb{R}^n$ ssi $\text{mult}_g(\lambda_i) = \text{mult}_a(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq k$, vu que

THM 10.80
 $\text{mult}_g(\lambda_i) \leq \text{mult}_a(\lambda_i)$

$\#(\mathcal{B} \text{ dans } \diamondsuit) = \text{mult}_g(\lambda_1) + \dots + \text{mult}_g(\lambda_k) \leq \text{mult}_a(\lambda_1) + \dots + \text{mult}_a(\lambda_k) = n$, par $\deg(P_A(\lambda)) = n$

Ce qui donne Eq (iii). □

Application : calcul d'une puissance d'une matrice diagonalisable

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \text{ diagonale} \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

A diagonalisable, avec $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$

Alors, si A diagonalisable, N facteurs " PDP^{-1} "

$$\begin{aligned} A^N &= \underbrace{(P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdots (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})}_{N \text{ facteurs "D"}} \\ &= P \cdot \underbrace{D \cdot D \cdot D \cdots D \cdot D}_{N \text{ facteurs "D"}} \cdot P^{-1} = P \cdot D^N \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} d_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^N \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Exemple/Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$

Calculer A^{1000} .

① Calculer les valeurs propres de A = racines de $P_A(\lambda)$

$$P_A = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-\lambda & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \left[\left(\frac{7}{9} - \lambda \right) \left(-\frac{7}{9} - \lambda \right) - \frac{32}{81} \right]$$

$$= -(2-1) \left[2^2 - \frac{49}{81} - \frac{32}{81} \right] = -(2-1)(2^2-1) = -(2-1)^2(2+1) \quad \boxed{57}$$

$$\Rightarrow \text{les valeurs propres sont } \begin{cases} \lambda = -1 \leftarrow \text{mult}_A(-1) = 1 \\ \lambda = 1 \leftarrow \text{mult}_A(1) = 2 \end{cases}$$

② Calculer les espaces propres $\rightarrow$ (base de) $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$

① Pour $\lambda = -1$

$$E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4/9 & 16/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4/9 & 16/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 2/9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow \frac{9}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{9}{4}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Alors

$$E_{-1} = \text{Ker} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3/2 \end{matrix} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underbrace{\quad}_{\vec{v}_1}$

② Pour $\lambda = 1$:

$$E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -16/9 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -16/9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & -8/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{9}{4}L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$E_1 = \text{Ker} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1/2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = \frac{x_2}{2} + 2x_3 \right\}$$

var libres
 x_2, x_3

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_3} \right\}$$

Alors,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nous donne

méthode de Gauss-Jordan

$$\boxed{A = \underbrace{P}_\checkmark \cdot \underbrace{D}_\checkmark \cdot \underbrace{P^{-1}}_\checkmark} \quad \leftarrow =$$

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$A^N = P \cdot D^N \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^N & 0 & 0 \\ 0 & 1^N & 0 \\ 0 & 0 & 1^N \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

si $N=1000$, on trouve

$$A^{1000} = P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1000} \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$